Technische Universität München
Lehrstuhl Informatik VIII
Prof. Dr.-Ing. Georg Carle
Dipl.-Ing. Stephan Günther, M.Sc.
Johannes Naab, M.Sc.

Tutorübung zur Vorlesung Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

Übungsblatt 3 (4. Mai – 8. Mai 2015)

Hinweis: Die mit * gekennzeichneten Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Erzielbare Datenraten mit IEEE 802.11a Wireless LAN

In dieser Aufgabe betrachten wir die physikalische Schicht von IEEE 802.11a (einem der WLAN-Standards). Dieser verwendet Trägerfrequenzen zwischen 5127 MHz und 5910 MHz. Da die Regulierung der Funkfrequenzen landesabhängig ist, unterscheiden sich die verfügbaren Frequenzbereiche im internationalen Vergleich. In Deutschland beispielsweise steht lediglich der Bereich 5170 MHz – 5330 MHz ohne Einschränkungen zur Verfügung. Dies entspricht einer Bandbreite von 160 MHz, welche in insgesamt 8 Kanäle zu jeweils 20 MHz unterteilt ist. Jeder Kanal ist wiederum in 64 Subcarrier zu je 312,5 kHz unterteilt. Die Symboldauer (zeitliche Ausdehnung eines Symbols) beträgt daher $1\,\mathrm{s}/312{,}5\,\mathrm{kHz} = 3{,}2\,\mu\mathrm{s}$. Um Stoerungen zu durch Reflexionen zu vermeiden, wird zwischen Symbolen ein zeitlicher Schutzabstand (engl. „Guard Interval“) eingefügt. Die effektive Symboldauer beträgt daher $T_s = 4\,\mu\mathrm{s}$. Hinzu kommt, dass zu jedem Zeitpunkt nur 48 der 64 Subcarrier zur Datenübertragung verwendet werden. Dies ist in Abbildung 1 verdeutlicht.

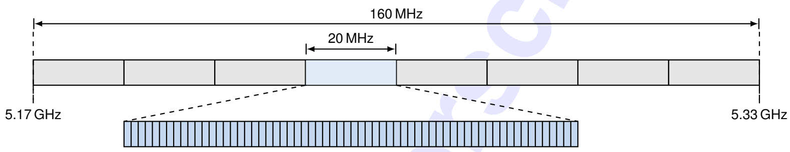

Abbildung 1: IEEE 802.11a Kanalaufteilung für Deutschland.

Die effektiv erzielbare Datenrate hängt nun vom verwendeten Modulationverfahren sowie der Coderate des Kanalcodes ab. Diese sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Datenrate [Mbit/s]	Modulation	Coderate
6	BPSK	1/2
9	BPSK	3/4
12	QPSK	1/2
18	QPSK	3/4
24	16-QAM	1/2
36	16-QAM	3/4
48	64-QAM	2/3
54	64-QAM	3/4

Tabelle 1: Datenraten, Modulationsverfahren und Coderaten für IEEE 802.11a.

Wir betrachten zunächst nur die maximale Übertragungsrate $r_{\max} = 54\,\frac{\mathrm{Mbit}}{\mathrm{s}}$.

a)* Wieviele Bit werden pro Symbol übertragen?

Sei M die Anzahl unterschiedlicher Symbole, für 64-QAM also $M = 64$. Dann erhalten wir pro Symbol

$$n = \log_2(M) = \log_2(64) = 6\,\mathrm{bit}.$$

b) Wie viele Bit werden bei Verwendung von 48 Subcarriern insgesamt pro Zeitschritt übertragen?

$$n_{brutto,48} = n \cdot 48 = 288\,\mathrm{bit}$$

c) Wie viele Bit von dem in Teilaufgabe b) berechneten Wert sind Nutzdaten (berücksichtigen Sie die Redundanz der Kanalkodierung)?

$$n_{netto,48} = \frac{3}{4} n_{brutto,48} = 216\,\text{bit}$$

d) Bestätigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Teilaufgaben c) die maximale Datenrate $r_{\max} = 54\,\text{Mbit/s}$.

$$r_{\max} = \frac{n_{netto,48}}{T_s} = 216\,\text{bit} \cdot 250000 = 54\,\text{Mbit/s}$$

e)* Bestimmen Sie nun unter Verwendung von Hartleys Gesetz die minimal notwendige Bandbreite B', die notwendig ist, um unter Verwendung von QAM-64 eine Datenrate von 54 $\frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$ zu erreichen.

$$r = 2B \log_2(M) \Rightarrow B' = 2B = \frac{r}{\log_2(M)} = 9\,\text{MHz}$$

Hinweis: Hartleys-Gesetz geht, wie in der Vorlesung eingeführt, geht von einseitigen Bandbreite B eines reellen Basisbandsignals aus. Bei Bandpasssignalen wie hier verdoppelt sich jedoch die nutzbare Bandbreite, ermöglicht dafür aber die gleichzeitige Übertragung auf einem Sinus- und einen Kosinusträger, was im Gegenzug auch die erzielbare Datenrate verdoppelt. Zur Darstellung desselben Signals im Basisband benötigt man jedoch ein komplexes Signal (komplexes Basisbandmodell). Daher kommt der „verfluchte" Faktor 2.

f) Aus welchem Grund ist der in Teilaufgabe e) errechnete Bandbreite B' bedeutend kleiner als $B = 20\,\text{MHz}$?

1. Wir verwenden nur 48 von 64 Subcarriern.
2. Der Kanalcode fügt Redundanz hinzu, was die Anzahl der zu übertragenden Bits steigert.
3. Das Guard-Interval vergrößert die Symboldauer.

Wir erhalten daher unter Berücksichtigung der oben genannten Faktoren:

$$2B = 9\,\text{MHz} \cdot \frac{64}{48} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3{,}2} = 20\,\text{MHz}$$

g) Bestimmen Sie das minimale SNR nach Shannon in der Einheit dB, so dass theoretisch die maximale Datenrate $r_{\max} = 54\,\text{Mbit/s}$ erreicht werden kann. Nutzen Sie dazu die in Teilaufgabe e) ermittelte Bandbreite B'.

$$r_{\max} \stackrel{!}{=} B' \log_2(1 + \text{SNR})$$
$$\text{SNR} = 2^{r_{\max}/B'} - 1 = 63$$

Umrechnung in dB:

$$\text{SNR dB} = 10 \cdot \log(\text{SNR})\,\text{dB} \approx 17{,}99\,\text{dB}$$

Hinweis:

- log oder $\log_{10} \triangleq$ Zehnerlogarithmus
- $\log_2$ oder ld $\triangleq$ Logarithmus Dualis
- ln $\triangleq$ natürlicher Logarithmus

h) Die Signalleistung beim Empfänger betrage nun $40\,\mu\text{W}$. Das Rauschen habe eine Leistung von $P_N = 3{,}75\,\mu\text{W}$. Welches Modulationsverfahren und welche Coderate werden unter diesen Bedingungen zum Einsatz kommen?

$$\begin{aligned} r &= B' \cdot \log_2(1 + \text{SNR}) \\ &= B' \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right) \\ &= 9 \cdot 10^6\,\frac{1}{\text{s}} \cdot \log_2\left(1 + \frac{40}{3{,}75}\right)\,\text{bit} = 31{,}90\,\text{Mbit/s} \end{aligned}$$

Aus Tabelle 1 sehen wir nun, dass $36\,\mathrm{Mbit/s} > r > 24\,\mathrm{Mbit/s}$ gilt. Die Datenrate wird demnach auf höchstens $24\,\mathrm{Mbit/s}$ heruntergeschaltet. Es kommt folglich QAM-16 sowie eine Coderate von $R = 1/2$ zum Einsatz.

Aufgabe 2 ALOHA

ALOHA (hawaiisch: „Hallo“) ist eines der ältesten Medienzugriffsverfahren und wurde 1971 an der Universität von Hawaii entwickelt, um die Hawaii-Inseln über eine Funkverbindung mit einer zentralen Vermittlungsstation zu verbinden. Die Trennung der zwei Kommunikationsrichtungen von den Inseln zur Vermittlungsstation und zurück erfolgte durch Frequenzduplex (FDD). Die Steuerung des Medienzugriffs war denkbar einfach: Sobald ein Sender Daten erhalten hatte, durfte dieser zu senden beginnen. Da aber keine Richtfunkantennen eingesetzt wurden und alle Sender auf den Inseln dieselbe Frequenz verwendeten, konnte es zu Kollisionen kommen, wenn sich zwei Übertragungen zeitlich überschnitten.
Zwei Jahre später wurde Slotted ALOHA eingeführt, bei dem die Sender nur noch zu Beginn fester Zeitschlitze (engl. *time slots*) anfangen durften zu senden. Die Vermittlungsstation übertrug dafür auf dem Rückkanal ein Taktsignal zur Synchronisation.

Wir wollen nun eine eigene Strategie definieren, die wir p-persistentes Slotted ALOHA nennen. Liegen Daten vor, so sendet eine Station mit Wahrscheinlichkeit p im nächsten Slot bzw. verzögert die Übertragung mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um einen Slot. Folgende Ausgangssituation sei gegeben:

- Es gibt n Nutzer, die saturiert sind, d. h. es liegen stets Daten zum Senden vor.
- Jeder Nutzer fängt mit Wahrscheinlichkeit p im nächsten möglichen Zeitschlitz an zu senden.
- Die Dauer eines Sendevorgangs entspricht der Länge eines Zeitschlitzes.

a)* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitschlitz eine kollisionsfreie Übertragung stattfindet?

Sei X die ZV, welche die Anzahl der im betreffenden Zeitschlitz gleichzeitig sendenden Stationen angibt. Die Übertragung ist genau dann kollisionsfrei, wenn $X = 1$ gilt, d. h. genau ein *beliebiger* Nutzer sendet. X ist also binomialverteilt mit Sendewahrscheinlichkeit p:

$$\Pr[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \Rightarrow \quad \Pr[X = 1] = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = np \cdot (1-p)^{n-1} =: f(n,p)$$

Warum verwenden wir hier die Binomialverteilung und nicht die Poisson-Verteilung?

Faustregel: Die Poisson-Verteilung wird immer dann verwendet, wenn keine konkrete Wahrscheinlichkeit p sondern lediglich eine Rate λ gegeben ist, welche angibt, wie oft ein bestimmtes Ereignis innerhalb eines Zeitintervalls eintritt.
Ist hingegen eine konkrete Wahrscheinlichkeit p gegeben, welche für alle n Stationen dieselbe ist, so verwendet man die Binomialverteilung.

b) Bestimmen Sie das optimale p^*, so dass die Wahrscheinlichkeit einer kollisionsfreien Übertragung maximiert wird.

Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial p} = n \cdot (1-p)^{n-1} - np \cdot (n-1) \cdot (1-p)^{n-2} &\overset{!}{=} 0 \\
n \cdot (1-p)^{n-1} &= np \cdot (n-1) \cdot (1-p)^{n-2} \\
1 - p &= p \cdot (n-1) \\
p &= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie nun die maximale Kanalauslastung bei n Nutzern.

Einsetzen liefert:

$$f(n,p^*) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

d) Bestimmen Sie nun die maximale Kanalauslastung bei einer sehr großen Anzahl von Nutzern.
Hinweis: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\lim_{n\to\infty} f(n,p^*) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{e} \approx 0.37$$