Technische Universität München
Lehrstuhl Informatik VIII
Prof. Dr.-Ing. Georg Carle
Dipl.-Ing. Stephan Günther, M.Sc.
Johannes Naab, M.Sc.

Tutorübung zur Vorlesung Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme

Übungsblatt 1 (20. April – 24. April 2015)

Hinweis: Die mit * gekennzeichneten Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Quellenentropie

Gegeben sei eine binäre Nachrichtenquelle Q, welche voneinander statistisch unabängige Zeichen X aus dem Alphabet $\mathcal{A} = \{a,b\}$ emittiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

Da $p_a + p_b = 1$ folgt $p_b = 0.75$.

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$$I(a) = -\log_2 p_a = 2{,}00\,\text{bit}$$
$$I(b) = -\log_2 p_b \approx 0{,}42\,\text{bit}$$

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{A}} p_x I(x) = 0{,}81\,\text{bit}$$

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q', so dass deren Entropie H maximal ist.

Zunächst drücken wir p_1 durch p_0 aus und schreiben $p_1 = 1 - p_0$. Zur Vereinfachung schreiben wir $p_0 = p$. Anschließend lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels Ableitung bestimmen:

$$H = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$
$$\frac{dH}{dp} = -\log_2(p) - \frac{p}{p\ln(2)} + \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)}$$
$$\Rightarrow \log_2(p) + \frac{p}{p\ln(2)} \overset{!}{=} \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)}$$

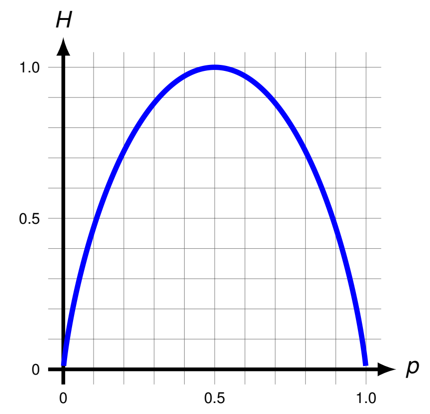
Vergleich beider Seiten liefert $p = 1 - p = 1/2$.

e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

Die Entropie wird maximiert, wenn $\Pr[X = a] = \Pr[X = b] = 0.5$ gilt. Die maximale Entropie beträgt daher

$$H_{\max} = -2 \cdot 0.5 \cdot \log_2(0.5) = 1\,\text{bit}.$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängingkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p.



g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von den von der Quelle Q emittierten Datenstrom ableiten hinsichtlich Redundanz?

Die von Q emittierte Zeichenkette, welche nichts anderes ist als verschiedene Realisierungen der Zufallsvariable X, beinhaltet Redundanz. Der von Q erzeugte Datenstrom ist durchschnittlich mit weniger als 1 bit/Symbol darstellbar.

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N-äre Quelle, d.h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

Allgemein gilt für die Entropie

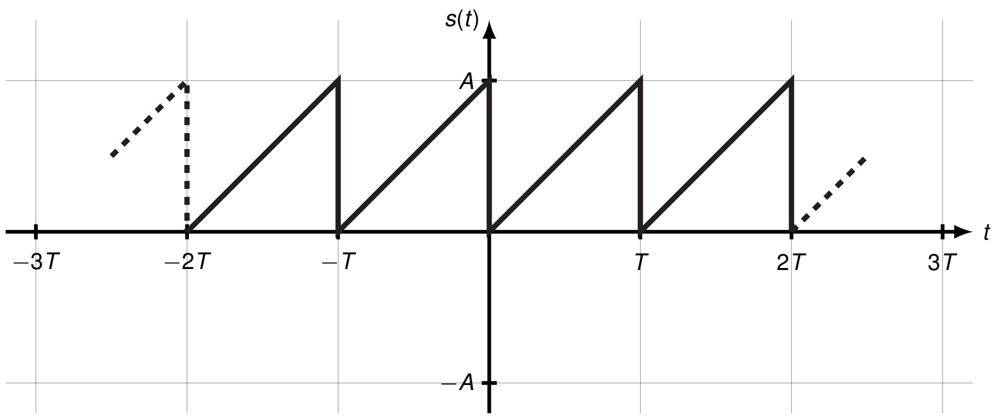
$$H = \sum_{x \in \mathcal{A}} I(x) p_i .$$

Mit der Forderung $p_i = p$, d. h. alle Zeichen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf, folgt sofort $p = 1/N$ und damit

$$H = \sum_{x \in \mathcal{A}} I(x) p = -\sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(\frac{1}{N} \right) \frac{1}{N} = \log_2(N).$$

Aufgabe 2 Fourierreihe

Gegeben sei das folgende T-periodische Zeitsignal $s(t)$:



a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$.

$$s(t) = \frac{t}{T} \cdot A \quad \text{für} \quad t \in [0, T]$$

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right) . \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cdot\cos(k\omega t)\,dt \text{ und } b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cdot\sin(k\omega t)\,dt. \tag{2}$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

Der Gleichanteil entsteht ausschließlich durch a_0, denn alle anderen Koeffizienten bestimmen die Amplitude einer Sinus- oder Kosinusschwingung.

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

Aus Formel (2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cdot\cos(k\omega t)\,dt \overset{k=0}{=} \frac{2}{T}\int_0^T \frac{t}{T}\cdot A\,dt \\ &= \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{T}\int_0^T t\,dt = \frac{2A}{T^2}\cdot\frac{T^2}{2} = A \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow s(t)$ besitzt einen Gleichanteil. Dieser beträgt $\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$.

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

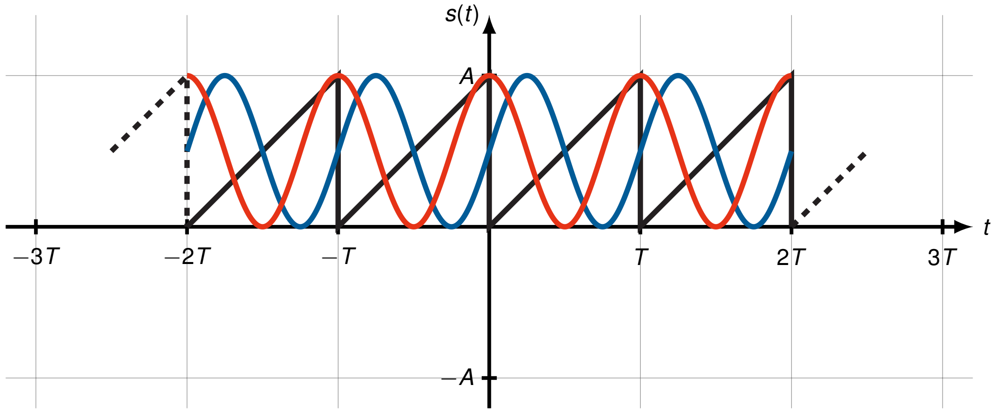
Ja: Das Signal $s(t)$ nimmt ausschließlich Werte größer Null an. Es kann daher nicht gleichanteilsfrei sein. Aus der Steigung der einzelnen Sägezähne lässt sich leicht erahnen, dass der zeitliche Mittelwert des Signals bei $A/2$ liegen muss.

e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k.
Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

* Intuitiv Der Sägezahn $s(t)$ ist in Phase mit einer Sinus-Schwingung: Zu Vielfachen der Periodendauer T besitzt $s(t)$ Nulldurchgänge (den Gleichanteil einmal abgezogen). Dies entspricht genau dem Verhalten einer Sinusschwingung. Falls Sie das nicht sehen, stellen Sie sich den abrupten Pegelwechsel an Vielfachen von T leicht abgeschrägt vor.
Ein kosinus-förmiges Signal hingegen hätte an diesen Stellen stets den Wert ± 1. Da dies allerdings nicht der Form des Sägezahns entspricht, müssen die Kosinus-Anteile entfernt werden. Dies wird durch $a_k = 0\ k > 0$ erreicht.

Mathematisch Da $\sin(x) = -\sin(x)$ handelt es sich hierbei um eine ungerade (also punktsymmetrische) Funktion. Das Signal $s(t)$ is, wenn man den Gleichanteil abzieht, ebenfalls punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (andernafalls ist der Symmetriepunkt lediglich entalng der Ordinate verschoben). Der Kosinus hingegen ist eine gerade bzw. achsensmmetrische Funktion, weswegen er nicht zu $s(t)$ beisteuern kann.

Anschaulich In der untetehenden Abbildung sind $s(t)$, $\cos(2\pi t)$ und $\sin(2\pi t)$ eingezeichnet. Man sieht, dass der Sinus bei Vielfachen von π das Signal $s(t)$ genau in seinen Mittelwerten kreuzt, während der Kosinus Extremwerte ungleich $s(k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$ annimmt.



Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

Hinweise: $\int_0^1 t \sin(ct)\, dt = \frac{\sin(c) - c \cdot \cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$.

Der erste Hinweis erspart uns eine partielle Integration. Wir erhalten:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t)\, dt = 2A \int_0^1 t \sin(k\omega t)\, dt$$
$$= 2A \cdot \frac{\sin(k\omega) - k\omega \cos(k\omega)}{k^2 \omega^2} \overset{\omega=2\pi}{=} -\frac{A}{k\pi}$$

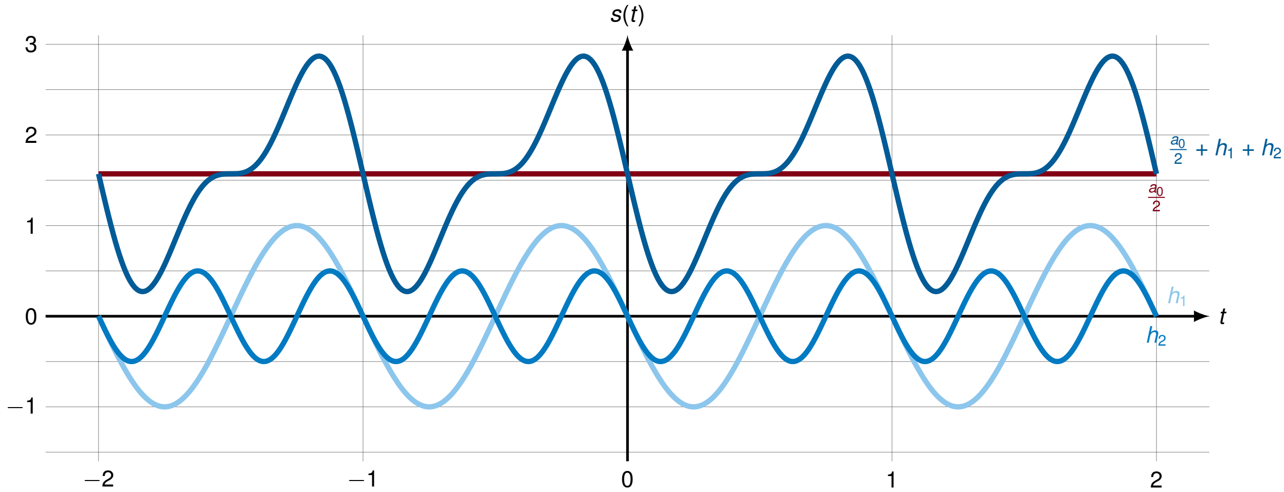
g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

Für $A = \pi$ erhalten wir:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6, \; b_1 = -1, \; b_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die ersten beiden Harmonischen lauten

$$h_1(t) = b_1 \sin(2\pi t) = -\sin(2\pi t), \quad \text{und} \quad h_2(t) = b_2 \sin(4\pi t) = -\frac{1}{2} \sin(4\pi t).$$



Aufgabe 3 Binärpräfixe (Hausaufgabe)

Die Unterschiede zwischen Binärpräfixen und SI-Präfixen sorgen immer wieder für Verwirrung. Das Problem besteht in widersprüchlichen Angaben insbesondere auf Seiten der Betriebssysteme: Häufig wird die Speicherbelegung von Massenspeichern in Binärpräfixen angegeben, obwohl die angegebenen Einheiten SI-Präfixe enthalten. Ein Beispiel: Sie kaufen eine Festplatte mit einer vom Hersteller ausgewiesenen Kapazität von 3 TB. Im Kleingedruckten auf der Verpackung finden Sie den Hinweis „1 TB = 10^{12} B". Es handelt sich also klar um SI-Präfixe. Nehmen wir an, das verwendete Betriebssystem rechnet mit Binärpräfixen.

SI-Präfix		Wert	Binärpräfixe		Wert
k	(kilo)	10^3	Ki	(Kibi)	2^{10}
M	(Mega)	10^6	Mi	(Mebi)	2^{20}
G	(Giga)	10^9	Gi	(Gibi)	2^{30}
T	(Tera)	10^{12}	Ti	(Tebi)	2^{40}
P	(Peta)	10^{15}	Pi	(Pebi)	2^{50}

Tabelle 1: SI-Präfixe und Binärpräfixe im Vergleich

a)* Geben Sie die Kapazität der Festplatte in TiB an.

$$3\,\mathrm{TB} = 3 \cdot 10^{12}\,\mathrm{B} = \frac{3 \cdot 10^{12}}{2^{40}}\,\mathrm{TiB} \approx 2{,}73\,\mathrm{TiB}$$

b)* Bestimmen Sie für die in Tabelle 1 angegebenen Präfixe den prozentualen Unterschied zwischen SI- und Binär-präfixen.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{Ki}} &= \frac{10^3}{2^{10}} \approx 97.66\,\% &\Rightarrow\quad e &= 2.34\,\% \\
\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Mi}} &= \frac{10^6}{2^{20}} \approx 95.37\,\% &\Rightarrow\quad e &= 4.63\,\% \\
\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{Gi}} &= \frac{10^9}{2^{30}} \approx 93.13\,\% &\Rightarrow\quad e &= 6.87\,\% \\
\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{Ti}} &= \frac{10^{12}}{2^{40}} \approx 90.95\,\% &\Rightarrow\quad e &= 9.05\,\% \\
\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Pi}} &= \frac{10^{15}}{2^{50}} \approx 88.82\,\% &\Rightarrow\quad e &= 11.18\,\%
\end{aligned}$$

Übrigens: Die Angabe von Binärpräfixen ist nur für Byte-Werte üblich. Bitwerte, z. B. kbit oder Mbit, werden ausschließlich mit SI-Präfixen angegeben.