

Tutorübung zur Vorlesung Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme Übungsblatt 3 (6. Mai – 10. Mai 2013)

Hinweis: Die mit * gekennzeichneten Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Hartley's Law, das B , und warum es auch für modulierte Signal gilt

In dieser Aufgabe wollen wir den Zusammenhang zwischen Hartley's Law im Basisband und für modulierte Signale (Bandpasssignale) untersuchen.

a)* Wie lautet Hartley's Law im Basisband?

$$R_H = 2B \log_2(M)$$

b)* Skizzieren den Betrag des Spektrums eines beliebigen Basisbandsignals und markieren seine Grenzfrequenz B .

s. Vorlesungsfolien

c) Das Signal aus Teilaufgabe b) werde nun auf eine (ausreichend hohe) Trägerfrequenz f_T moduliert. Skizzieren Sie das Spektrum des modulierten Signals und markieren Sie die Grenzen des unteren und oberen Seitenbands. Welche effektive Bandbreite B' hat das Signal nun?

Durch die Verschiebung wirkt sich der negative Frequenzanteil aus dem Basisband nun aus. Das modulierte Signal hat damit die effektive Bandbreite $B' = 2B$.

d) Wie lautet Hartley's Law für ein Bandpasssignal (moduliertes Signal) der Bandbreite B' ?

$$R_H = B' \log_2(M)$$

Aufgabe 2 Kanalkapazität von IEEE 802.11a Wireless LAN

In dieser Aufgabe betrachten wir die physikalische Schicht des IEEE 802.11a Wireless LAN Standards. Dieser verwendet Trägerfrequenzen zwischen 5.127 GHz und 5.91 GHz. Da die Regulierung der Funkfrequenzen landesabhängig ist, unterscheiden sich die verfügbaren Frequenzbereiche im internationalen Vergleich. In Deutschland beispielsweise wird lediglich der Bereich 5.17 GHz – 5.33 GHz verwendet. Dies entspricht einer Bandbreite von 160 MHz, welche in insgesamt 8 Kanäle zu jeweils 20 MHz unterteilt ist. Jeder Kanal ist wiederum in 64 *Subcarrier* zu je 312.5 kHz unterteilt.

Um Störungen zwischen den Subcarriern zu vermeiden, wird am Rand jedes Subcarriers ein kleiner Bereich als Schutzabstand (engl. *Guard Interval*) verwendet. Es stehen damit effektiv pro Subcarrier 250 kHz zur Verfügung. Hinzu kommt, dass zu jedem Zeitpunkt nur 48 der 64 Subcarrier zur Datenübertragung¹ verwendet werden. Dies ist in Abbildung 1 verdeutlicht.

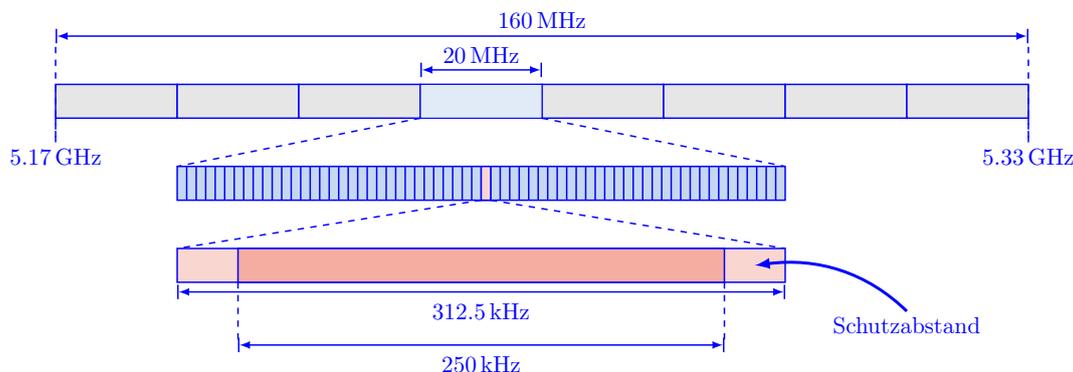


Abbildung 1: IEEE 802.11a Kanalaufteilung für Deutschland.

Da abhängig von der Kanalqualität nicht immer die maximale Übertragungsrate von 54 Mbit/s erreicht werden kann, werden mehrere Übertragungsraten mit unterschiedlichen Modulationsverfahren und Kanalkodierungen eingesetzt. Diese sind in Tabelle 1 aufgelistet. Die Modulationsverfahren *BPSK*

Datenrate [Mbit/s]	Modulation	Coderate
6	BPSK	1/2
9	BPSK	3/4
12	QPSK	1/2
18	QPSK	3/4
24	16-QAM	1/2
36	16-QAM	3/4
48	64-QAM	2/3
54	64-QAM	3/4

Tabelle 1: Datenraten, Modulationsverfahren und Coderaten für IEEE 802.11a.

(*Binary Phase Shift Keying*) und *QPSK* (*Quad Phase Shift Keying*) kodieren dabei jeweils 1 bit bzw. 2 bit pro Symbol.

Wir betrachten zunächst nur die maximale Übertragungsrate $r_{\max} = 54$ Mbit/s.

a)* Wieviele Bit werden pro Symbol übertragen?

Sei M die Anzahl unterschiedlicher Symbole, für 64-QAM also $M = 64$. Dann erhalten wir pro Symbol

$$n = \log_2(M) = \log_2(64) = 6 \text{ bit.}$$

b) Wie viele Bit werden bei Verwendung von 48 Subcarriern insgesamt pro Zeitschritt übertragen.

$$n_{\text{brutto},48} = n \cdot 48 = 288 \text{ bit}$$

¹4 weitere Subcarrier werden zur Übertragung von Pilotsequenzen verwendet, was wir im Folgenden aber vernachlässigen.

c) Wie viele Bit werden *effektiv* bei Verwendung aller 48 Subcarrier gleichzeitig übertragen? Berücksichtigen Sie dabei den Overhead, der durch die Kanalkodierung entsteht.

$$n_{netto,48} = \frac{3}{4} n_{brutto,48} = 216 \text{ bit}$$

d)* Bestimmen Sie die Symboldauer T_S in Abhängigkeit der effektiven Bandbreite (= Bandbreite abzüglich des Schutzabstands) pro Subcarrier.

Da jedem Subcarrier effektiv 250 kHz zur Verfügung stehen, erhalten wir für die Symboldauer

$$T_S = \frac{1}{250 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 4 \mu\text{s}.$$

Warum wird nicht mit 125 kHz gerechnet?

Die Symbolzeit im Basisband errechnet sich durch $T_S = 1/(2B)$ (Abtasttheorem), wobei B die einseitige Grenzfrequenz (= maximale Frequenz des Basisbandsignals) bezeichnet. Bei einer geringeren Symbolzeit überlappen sich einzelne Symbole bzw. deren Spektren. Verschiebt man nun einen 250 kHz breiten Subcarrier ins Basisband, erhalten wir $f_B = 125 \text{ kHz}$. Eingesetzt in $T_S = 1/(2f_B)$ erhalten wir die 4 μs

e) Gegeben die Symboldauer T_S aus Teilaufgabe d), bestimmen Sie die Anzahl N übertragener Symbole pro Sekunde je Subcarrier.

$$N = \frac{1}{T_S} = 250000$$

f) Bestätigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus den Teilaufgaben c) und e) die maximale Datenrate $r_{\max} = 54 \text{ Mbit/s}$.

$$r_{\max} = N n_{netto,48} = 216 \text{ bit} \cdot 250000 = 54 \text{ Mbit/s}$$

Wir haben gezeigt, wie IEEE 802.11 die maximale Datenrate von 54 Mbit/s in Abhängigkeit der Kanalbandbreite und der Anzahl der Signalstufen erreicht, ohne dabei direkt auf Hartley's Law zurück zu greifen.

Im Folgenden wollen wir nun zunächst das bisherige Ergebnis noch mal direkt mittels Hartley bestätigen, und im Anschluss das notwendige SNR bestimmen, so dass r_{\max} nach Shannon überhaupt erreicht werden kann. Hierfür benötigen wir die Kanalkapazität nach Hartley

$$C_H = 2B \log_2 M \tag{1}$$

in Abhängigkeit der Anzahl M unterscheidbarer Signalstufen und die Kanalkapazität nach Shannon

$$C_S = B \log_2 (1 + \text{SNR}) \tag{2}$$

in Abhängigkeit des SNR. In beiden Fällen bezeichnet B die Grenzfrequenz eines Signals im Basisband.

g)* Bestimmen Sie die zur Bandpassbandbreite $B_{BP} = 250$ kHz je Subcarrier äquivalente Grenzfrequenz B im Basisband.

$$B = \frac{1}{2} B_{BP} = 125 \text{ kHz}$$

h) Bestimmen Sie die nach Hartley erreichbare Datenrate bei gleichzeitiger Verwendung von 48 Subcarriern mit 64-QAM.

$$C_H = 2B \log_2(M) \cdot 48 = 72 \text{ Mbit/s}$$

i)* Weswegen ist die h) bestimmte Datenrate größer als 54 Mbit/s?

Da die Coderate von $R = 3/4$ noch nicht berücksichtigt ist. Offensichtlich ist die reservierte Bandbreite so gewählt worden, dass die Bruttobitrate (inkl. Kanalkodierung) erreichbar ist.

j)* Bestimmen Sie das minimale SNR nach Shannon in der Einheit dB, so dass theoretisch die maximale Datenrate $r_{\max} = 54$ Mbit/s erreicht werden kann.

$$\begin{aligned} r_{\max} &\stackrel{!}{=} B \log_2(1 + \text{SNR}) \cdot 48 \\ \text{SNR} &= 2^{r_{\max}/(48B)} - 1 = 511 \end{aligned}$$

Umrechnung in dB:

$$\text{SNR dB} = 10 \cdot \log(\text{SNR}) \text{ dB} \approx 27 \text{ dB}$$

Hinweis:

- \log oder $\log_{10} \triangleq$ Zehnerlogarithmus
- \log_2 oder $\text{ld} \triangleq$ Logarithmus Dualis
- $\ln \triangleq$ natürlicher Logarithmus

k)* Die Signalleistung beim Empfänger betrage nun 40 mW beschränkt. Das Rauschen habe eine Leistung von $P_N = 3.75$ mW. Welches Modulationsverfahren und welche Coderate werden unter diesen Bedingungen zum Einsatz kommen?

$$\begin{aligned} r &= 48B \cdot \log_2(1 + \text{SNR}) \\ &= 48B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right) \\ &= 6 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}} \cdot \log_2\left(1 + \frac{40}{3.75}\right) \text{ bit} = 21.27 \text{ Mbit/s} \end{aligned}$$

Da nun $24 \text{ Mbit/s} > r > 18 \text{ Mbit/s}$ gilt, wird auf höchstens 18 Mbit/s heruntergeschaltet. Es kommt folglich QPSK sowie eine Coderate von $R = 3/4$ zum Einsatz.

Warum wird in j) und k) mit der Nettodatenrate r_{\max} gerechnet?

Shannon gibt eine informationstheoretische Datenrate an, die mit entsprechender Kanalkodierung auch erreichbar ist. Wie dieser Code auszusehen hat, ist jedoch ein offenes Problem der Informationstheorie.

