Technische Universität München
Lehrstuhl Informatik VIII
Prof. Dr.-Ing. Georg Carle
Dipl.-Ing. Stephan Günther, M.Sc.
Nadine Herold, M.Sc.
Dipl.-Inf. Stephan-A. Posselt

Tutorübung zur Vorlesung Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme
Übungsblatt 1 (22. April – 26. April 2013)

Hinweis: Die mit * gekennzeichneten Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorhergehender Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 1 Quellenentropie

Gegeben sei eine binäre Nachrichtenquelle Q, welche voneinander statistisch unabängige Zeichen X aus dem Alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ emittiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

Da $p_a + p_b = 1$ folgt $p_b = 0.75$.

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ der beider Zeichen.

$$I(a) = -\log_2 p_a = 2.00\,\text{bit}$$
$$I(b) = -\log_2 p_b \approx 0.42\,\text{bit}$$

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$$H(X) = \sum_{x\in\mathcal{A}} p_x I(x) = 0.81\,\text{bit}$$

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q', so dass deren Entropie H maximal ist.

Zunächst drücken wir p_1 durch p_0 aus und schreiben $p_1 = 1 - p_0$. Zur Vereinfachung schreiben wir $p_0 = p$. Anschließend lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned}
H &= -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p) \\
\frac{dH}{dp} &= -\log_2(p) - \frac{p}{p\ln(2)} + \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)} \\
&\Rightarrow \log_2(p) + \frac{p}{p\ln(2)} \overset{!}{=} \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)}
\end{aligned}$$

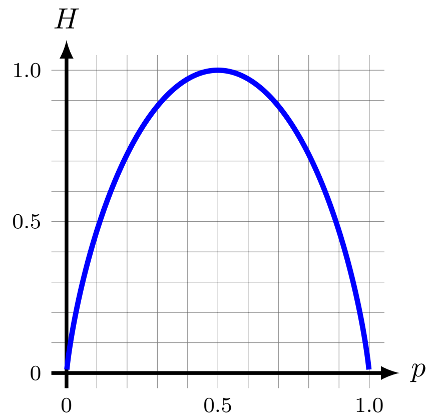
Vergleich beider Seiten liefert $p = 1 - p = 1/2$.

e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

Die maximale Entropie beträgt

$$H_{\max} = H(p = 0.5) = -2 \cdot 0.5 \cdot \log_2(0.5) = 1\,\text{bit}.$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängingkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p.



g) Offensichtlich ist die Entropie der Quelle Q mit $H(Q) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von Q emittierten Datenstrom ableiten?

Die von Q emittierte Zeichenkette beinhaltet Redundanz. Der von Q erzeugte Datenstrom ist durchschnittlich mit weniger als 1 bit/Symbol darstellbar.

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N-äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

Allgemein gilt für die Entropie

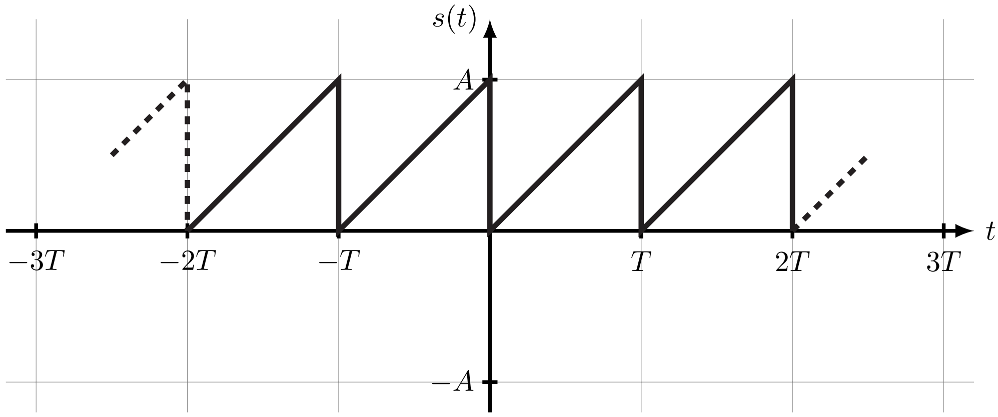
$$H = \sum_{x \in \mathcal{A}} I(x) p_i.$$

Mit der Forderung $p_i = p$, d. h. alle Zeichen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf, folgt sofort $p = 1/N$ und damit

$$H = \sum_{x \in \mathcal{A}} I(x) p = -\sum_{i=1}^{N} \log_2\left(\frac{1}{N}\right) \frac{1}{N} = \log_2(N).$$

Aufgabe 2 **Fourierreihe**

Gegeben sei das folgende T-periodische Zeitsignal $s(t)$:



a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$.

$$s(t) = \frac{t}{T} \cdot A \quad \text{für} \quad t \in [0, T]$$

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right). \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\ dt \quad \text{und}\ b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\ dt. \tag{2}$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

Der Gleichanteil entsteht ausschließlich durch a_0, denn alle anderen Koeffizienten bestimmen die Amplitude einer Sinus- oder Kosinusschwingung.

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

Aus Formel (2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\ dt \overset{k=0}{=} \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \cdot A\ dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{T} \int_0^T t\ dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} = A \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $s(t)$ besitzt einen Gleichanteil. Dieser beträgt $\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$.

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

Ja: Das Signal $s(t)$ nimmt ausschließlich Werte größer Null an. Es kann daher nicht gleichanteilsfrei sein. Aus der Steigung der einzelnen Sägezähne lässt sich leicht erahnen, dass der zeitliche Mittelwert des Signals bei $A/2$ liegen muss.

e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k.
Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

Der Sägezahn $s(t)$ ist in Phase mit einer Sinus-Schwingung: Zu Vielfachen der Periodendauer T besitzt $s(t)$ Nulldurchgänge (den Gleichanteil einmal abgezogen). Dies entspricht genau dem Verhalten einer Sinusschwingung. Falls Sie das nicht sehen, stellen Sie sich den abrupten Pegelwechsel an Vielfachen von T leicht abgeschrägt vor.
Ein kosinus-förmiges Signal hingegen hätte an diesen Stellen stets den Wert ± 1. Da dies allerdings nicht der Form des Sägezahns entspricht, müssen die Kosinus-Anteile entfernt werden. Dies wird durch $a_k = 0 \; k > 0$ erreicht.

Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.
Hinweise: $\displaystyle\int_0^1 t \sin(ct)\, dt = \frac{\sin(c) - c \cdot \cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$.

Der erste Hinweis erspart uns eine partielle Integration. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t)\, dt = 2A \int_0^1 t \sin(k\omega t)\, dt \\ &= 2A \cdot \frac{\sin(k\omega) - k\omega \cos(k\omega)}{k^2\omega^2} \overset{\omega=2\pi}{=} -\frac{A}{k\pi} \end{aligned}$$

g) Skizzieren mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

Für $A = \pi$ erhalten wir:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6, \; b_1 = -1, \; b_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die ersten beiden Harmonischen lauten

$$h_1(t) = b_1 \sin(2\pi t) = -\sin(2\pi t), \quad \text{und} \quad h_2(t) = b_2 \sin(4\pi t) = -\frac{1}{2} \sin(4\pi t).$$